

Interesujące twierdzenia związane z ciągami arytmetycznymi liczb pierwszych

Ryszard Andruszkiewicz
Instytut Matematyki
Uniwersytet w Białymstoku



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Definicja 1. Liczbą *pierwszą* nazywamy taką liczbę naturalną $p > 1$, która posiada dokładnie dwa dzielniki (mianowicie: 1 i p).

Definicja 2. Liczbą *prawie pierwszą* nazywamy taką liczbę, która jest liczbą pierwszą albo kwadratem liczby pierwszej albo iloczynem dwóch różnych liczb pierwszych (np. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10).



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Największa znana nam liczba pierwsza to $2^{43112609} - 1$.

Znalazł ją 23.08.2008 r. Edson Smith z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Los Angeles, który prowadził poszukiwania na 75 uczelnianych komputerach. W nagrodę dostał 100 tys. dol. od Electronic Frontier Foundation (EFF) - organizacji, która walczy o wolności obywatelskie w elektronicznym świecie (m.in. prawo do anonimowości, prywatności i wolności słowa). Duże liczby pierwsze odgrywają kluczową rolę we współczesnych programach do szyfrowania wiadomości np. w internecie.

EFF obiecuje teraz 150 tys. dol. dla tego, kto znajdzie liczbę pierwszą mającą ponad 100 mln cyfr dziesiętnych. Każdy może się przyłączyć do tych łowów, ściągając na swój komputer darmowe oprogramowanie (szczegóły: <http://www.mersenne.org>).



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Przykłady nierozwiązanych problemów addytywnej teorii liczb pierwszych:

Hipoteza liczb pierwszych bliźniaczych: Istnieje nieskończenie wiele par $(p, p+2)$ liczb bliźniaczych, tzn. takich, że p i $p+2$ są liczbami pierwszymi (np. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$).

Słaba hipoteza Goldbacha: Każda liczba naturalna nieparzysta $n > 6$ jest sumą trzech liczb pierwszych (np. $7 = 2 + 2 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$, $11 = 3 + 3 + 5$).

Hipoteza Goldbacha: Każda parzysta liczba naturalna $n > 3$ jest sumą dwóch liczb pierwszych (np. $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$).



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Pewne rezultaty związane z tymi hipotezami:

Twierdzenie Chena (1966): Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $p+2$ jest liczbą prawie pierwszą.

Twierdzenie Winogradowa (1937): Każda dostatecznie duża nieparzysta liczba naturalna n jest sumą trzech liczb pierwszych.

Twierdzenie Liu-Wang (2002): Każda nieparzysta liczba naturalna $n > 10^{1346}$ jest sumą trzech liczb pierwszych.

[Wiadomo też, że każda nieparzysta liczba naturalna $n < 10^{20}$ jest sumą trzech liczb pierwszych.]



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Największe znane dziś liczby bliźniacze to:
 $2003663613 \cdot 2^{195000} - 1$ oraz

$2003663613 \cdot 2^{195000} + 1$.

Mają one po 58711 cyfr i zostały odkryte
10.01.2007 r.

Ciągi arytmetyczne liczb pierwszych:

2

2,3

3,5,7

5,11,17,23

5,11,17,23,29

7,37,67,97,127,157

7,157,307,457,607,757,907

199,409,619,829,1039,1249,1459,1669



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Najdłuższy znany dziś ciąg arytmetyczny złożony z liczb pierwszych liczy 25 wyrazów i został odkryty 17 maja 2008 roku dzięki współpracy matematyka z Uniwersytetu Wrocławskiego, Jarosława Wróblewskiego i informatyka z Izraela, Raanana Chermoniego. Dokładniej rzecz ujmując, Chermoni wykonał obliczenia, wykorzystując metodę opracowaną przez wrocławianina.

Liczba 6171054912832631 jest pierwszym wyrazem tego ciągu, a każdy kolejny jest większy od poprzedniego o 81737658082080, czyli o $23\#$, gdzie $23\#$ jest iloczynem wszystkich liczb pierwszych nie większych od 23.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Poprzedni rekord, ciąg 24-elementowy, należał właśnie do Jarosława Wróblewskiego i został ustanowiony 18 stycznia 2007. Znaleziony został dzięki równoległej pracy 75 komputerów. Odkrycie ciągu o 25 wyrazach wymagało w sumie 57 lat pracy procesora ósmej generacji, Athlon-64, jednak praca ta dzięki współpracy matematyka tworzącego algorytm i programisty z jego sprzętem została usprawniona przez podzielenie jej między wiele maszyn liczących. Jest to typowa dziś metoda dokonywania odkryć z zakresu teorii liczb i innych działów matematyki oraz informatyki, a także innych nauk, w których dużo problemów daje się sprowadzić do weryfikacji odpowiedniej liczby danych.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Aby pobić rekord i odnaleźć ciąg o 26 wyrazach, potrzebnych będzie najprawdopodobniej ponad 1000 lat działania tego samego procesora, tym bardziej potrzeba więc udziału wielu komputerów. Mogłoby zająć to wręcz kilka minut, gdyby użytych było jednocześnie kilkaset milionów odpowiedniej klasy maszyn, ale uprzednio trzeba by było i tak właściwie podzielić między nie całą pracę.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Najdłuższy znany ciąg kolejnych liczb pierwszych tworzących ciąg arytmetyczny liczy 10 wyrazów. Ciąg ten znaleziono w 1998r. Zaczyna się liczbą o 93 cyfrach, a jego różnica wynosi 210. Szacuje się, że aby poprawić ten rekord, potrzebne będzie wykorzystanie procesorów o szybkości trylion razy większej niż obecna. Czyli jeszcze trochę to potrwa...



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Historia rezultatów:

Twierdzenie Lagrange’a-Waringa (1770):
Różnica ciągu arytmetycznego długości $k > 2$ liczb pierwszych jest podzielna przez iloczyn $(k-1) \#$ wszystkich liczb pierwszych mniejszych od k . [W szczególności nie istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny liczb pierwszych].

Twierdzenie van der Waerdena (1927):
Jeżeli zbiór liczb naturalnych jest pokolorowany skończoną liczbą kolorów, to pewna klasa liczb tego samego koloru zawiera ciągi arytmetyczne dowolnej skończonej długości.

Twierdzenie Van der Corput’a (1939):
Istnieje nieskończenie wiele ciągów arytmetycznych długości 3 liczb pierwszych.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Twierdzenie Roth'a (1956):

Niech A będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych posiadającym dodatnią gęstość górną. Wówczas w zbiorze A istnieje nieskończenie wiele rosnących ciągów arytmetycznych długości 3.

Twierdzenie Szemeredi (1969): W każdym podzbiore zbioru liczb naturalnych o dodatniej gęstości górnej istnieje nieskończenie wiele rosnących ciągów arytmetycznych długości 4.

Twierdzenie Szemeredi (1975): W każdym podzbiore zbioru liczb naturalnych o dodatniej gęstości istnieje rosnący ciąg arytmetyczny dowolnej skończonej długości.

Twierdzenie Green'a-Tao (2004):



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Dla każdej liczby naturalnej k istnieje rosnący ciąg arytmetyczny liczb pierwszych długości k .

Terence Tao (ur. 1975 r.) nauczył się czytać i liczyć w wieku dwóch lat, oglądając w telewizji Ulicę Sezamkową, rok później zaczął chodzić do szkoły podstawowej, ale wkrótce został z niej wypisany. W wieku czterech lat ponownie rozpoczął edukację w podstawówce, lecz z programem matematyki ze szkoły średniej. W wieku siedmiu lat uczęszczał do szkoły średniej w adelajdzkiej dzielnicy Blackwood ucząc się przedmiotów ze szkoły średniej i podstawowej, rok później ukończył podstawówkę i rozpoczął naukę w szkole, fizyki na poziomie III klasy liceum i matematyki na poziomie klas III i IV, w domu samodzielnie studiował matematykę z pierwszego roku studiów wyższych.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



W wieku dziewięciu lat rozpoczął studia na Uniwersytecie Flindersa w Adelajdzie. W 1985 zdobył brązowy medal na międzynarodowej olimpiadzie matematycznej, rok później zdobył srebrny medal, a dwa lata później złoty.

W wieku 16 lat otrzymał licencjat (Bachelor of Science) z Flinders University, a rok później zostaje magistrem (Masters Degree). Cztery lata później obronił doktorat w Princeton, a w wieku 24 lat został profesorem matematyki na uniwersytecie kalifornijskim w Los Angeles. W 2006 r. jako pierwszy Australijczyk, w wieku 31 lat, został nagrodzony medalem Fieldsa za całokształt osiągnięć.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Medal Fieldsa - nagroda przyznawana w dziedzinie matematyki dwóm, trzem lub czterem uczonym za wyniki, które miały największy wpływ na jej rozwój. Związana z nim jest premia finansowa w wysokości 15.000 dolarów kanadyjskich (w 2006: 13 400 USD).

Ufundowany w 1932 przez kanadyjskiego matematyka J. Ch. Fieldsa. Przyznawany od 1936, z przerwą wojenna, która trwała do 1954.

Medal Fieldsa jest przyznawany wyłącznie młodym matematykom (którzy nie ukończyli 40 lat do 1 stycznia roku, w którym jest nadawany) przez komitet powoływany co 4 lata przez Międzynarodową Unię Matematyczną i wręczany podczas międzynarodowych kongresów matematycznych.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Medal jest wykonywany ze złoczonego metalu według projektu kanadyjskiego artysty, R. Taita McKenziego. Ma 25 centymetrów (11 cali) średnicy.

Z jednej strony widnieją na nim głowa Archimedesesa i cytaty z rzymskiego poety Maniliusza *Transire suum pectus mundoque potiri* (Wznieść się ponad granice ludzkich możliwości i przewodzić światu), z drugiej - napis *Congregati ex toto orbe mathematici ab scripta insignia tribuere* (Zebrani z całego świata matematycy honorują wielkie osiągnięcia).

Na medalu nie widnieje nazwisko Fieldsa. Umieszcza się na nim nazwisko laureata, ale samo: zgodnie z wola Fieldsa i postanowieniem społeczności matematycznej, kraj pochodzenia i macierzysta uczelnia laureata nie mają znaczenia.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Laureaci:

1936: Lars Valerian Ahlfors (Finlandia), Jesse Douglas (USA)

1950: Laurent Schwartz (Francja), Atle Selberg (Norwegia)

1954: Kunihiko Kodaira (Japonia), Jean-Pierre Serre (Francja)

1958: Klaus Roth (Wielka Brytania), Rene Thom (Francja)

1962: Lars Hörmander (Szwecja), John Milnor (USA)

1966: Michael Francis Atiyah (Wielka Brytania), Paul Joseph Cohen (USA), Alexander Grothendieck (Francja), Stephen Smale (USA)

1970: Alan Baker (Wielka Brytania), Heisuke Hironaka (Japonia), Siergiej Nowikow (ZSRR), John Griggs Thompson (Wielka Brytania)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



1974: Enrico Bombieri (Włochy), David Mumford (USA)

1978: Pierre Deligne (Belgia), Charles Fefferman (USA), Grigorij Margulis (ZSRR), Daniel Quillen (USA)

1982: Alain Connes (Francja), William Thurston (USA), Shing-Tung Yau (Chiny)

1986: Simon Kirwan Donaldson (Wielka Brytania), Gerd Faltings (RFN), Michael Freedman (USA)

1990: Wladimir Drinfeld (ZSRR), Vaughan Frederick Randal Jones (Nowa Zelandia), Shigefumi Mori (Japonia), Edward Witten (USA)

1994: Jefim I. Zelmanow (Rosja), Pierre-Louis Lions (Francja), Jean Bourgain (Belgia), Jean-Christophe Yoccoz (Francja)

1998: Richard Ewen Borcherds (Wielka Brytania), William Timothy Gowers (Wielka Brytania), Maksim Koncewicz (Rosja), Curtis T. McMullen (USA)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



2002: Laurent Lafforgue (Francja), Wladimir Wojewodski (Rosja/USA)

2006: Andriej Okunkow (Rosja), Grigorij Perelman (Rosja, nie przyjął), Terence Tao (Australia), Wendelin Werner (Francja)

Zawód matematyk wśród najlepszych na świecie

Matematyk, aktuariusz, statystyk, biolog, informatyk, analityk systemów komputerowych, historyk, socjolog, projektant przemysłowy i księgowy – te zawody tworzą pierwszą dziesiątkę najlepszych zawodów świata. Listę opublikował poniedziałkowy „WSJ”, dodatek do „Dziennika”, przy czym gazeta powołuje się na raport CareerCast.com, z którego wnioski wyciągnął Les Krantz w książce „Almanach zawodów”.

Przy tworzeniu zestawienia najlepszych i najgorszych zawodów świata brano pod uwagę „pięć kryteriów przyrodzonych każdej pracy”, tzn. otoczenie, dochody, perspektywy rozwoju,



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



wymagania fizyczne i stres. Zawód matematyka zajął miejsce pierwsze w zestawieniu właśnie dzięki temu, że osoby go wykonujące pracują zazwyczaj w bardzo korzystnych warunkach: „w zamkniętych pomieszczeniach, z dala od toksycznych wyziewów i hałasu”.

Poza tym, matematycy nie dźwigają w pracy, nie czołgają się ani nie pracują w pozycji kucznej (patrz: hydraulicy, mechanicy samochodowi oraz strażacy). Średnia rocznego dochodu osób pracujących w tym zawodzie w USA to 94 160 USD. Ponadto matematycy z resztą zespołu porozumiewają się z domu, rzadko pracują po godzinach i nie czują się zestresowani.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

